



Institut  
Mines-Telecom

# Electronique des Systèmes Embarqués

Chadi Jabbour

Pré-requis



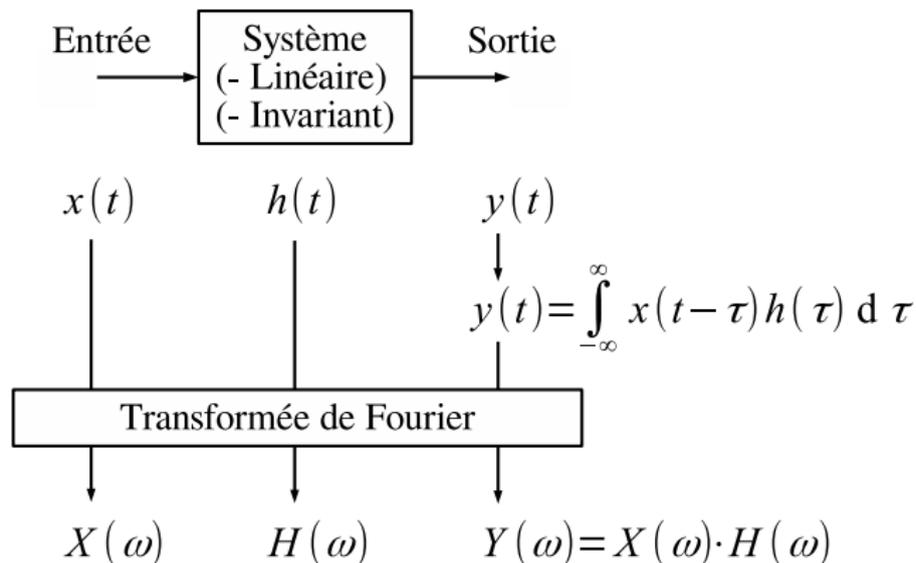
- ▶ La transformée de Fourier et la transformée de Laplace
- ▶ Le principe de l'échantillonnage (théorème de Shannon Nyquist, repliement spectral )
- ▶ L'analyse des circuits

Transformée de Fourier et de Laplace

Echantillonnage

Analyse des circuits

# SLI: La propriété fondamentale



Une sinusoïde reste un sinusoïde de même fréquence, son amplitude et sa phase peuvent être modifiées

L'outil mathématique qui lie les domaines temporel et fréquentiel est la transformée de Fourier :

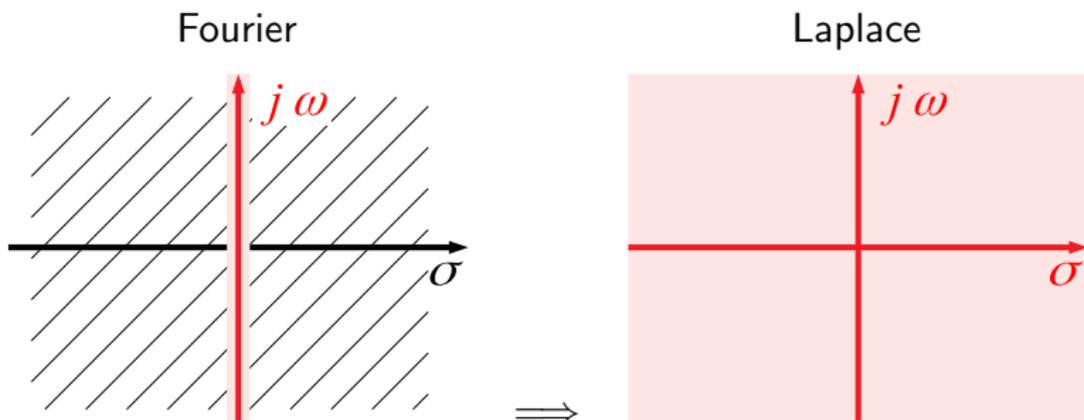
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$X(j\omega)$  peut s'interpréter comme la projection de  $x(t)$  sur le signal harmonique  $e^{j\omega t}$

si  $x(t)$  est causal alors  $X(\omega)$  devient

$$X(j\omega) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

La TL est une extension de la TF au plan complexe complet.



$$F(p = (\sigma, j\omega)) = \int f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

Le facteur  $e^{-\sigma t}$  est un facteur de convergence que la transformée de Fourier ne possède pas.

### Produit de convolution et TL

Soit  $y(t) = x(t) * h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2)$$

Sa TL est :

$$Y(p) = X(p) \cdot H(p) \quad (3)$$

### Transformée d'un produit (simple) de fonctions

La TL du produit  $z(t) = v(t) \cdot w(t)$  est :

$$Z(p) = V(p) * W(p) \quad (4)$$

- ▶ Impulsion de Dirac  $\delta(t)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-tp} dt = e^{-tp}|_{t=0} = 1 \quad (5)$$

- ▶ Impulsion de Dirac décalée  $\delta(t - \tau)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-tp} dt = e^{-t\tau}|_{t=\tau} = e^{-\tau p} \quad (6)$$

- ▶ Échelon unité (Heaviside)  $u(t)$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-tp} dt = \left[ -\frac{1}{p} e^{-tp} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p} \quad \text{pour } \Re(p) > 0 \quad (7)$$

- ▶ Signal sinusoïdal complexe (causal)  $s(t) = e^{j\omega_0 t}$ ,  $\omega_0, t \in \mathbb{R}^+$

$$\mathcal{L}\{s(t)\} = \int_0^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-tp} dt = \frac{1}{-p + j\omega_0} \left[ \exp((-p + j\omega_0)t) \right]_0^{\infty}$$

## Premier résultat :

On montre que pour un système linéaire invariant causal de réponse impulsionnelle  $h(t)$  :

$$\text{Stabilité} \Leftrightarrow \int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (10)$$

## Deuxième résultat

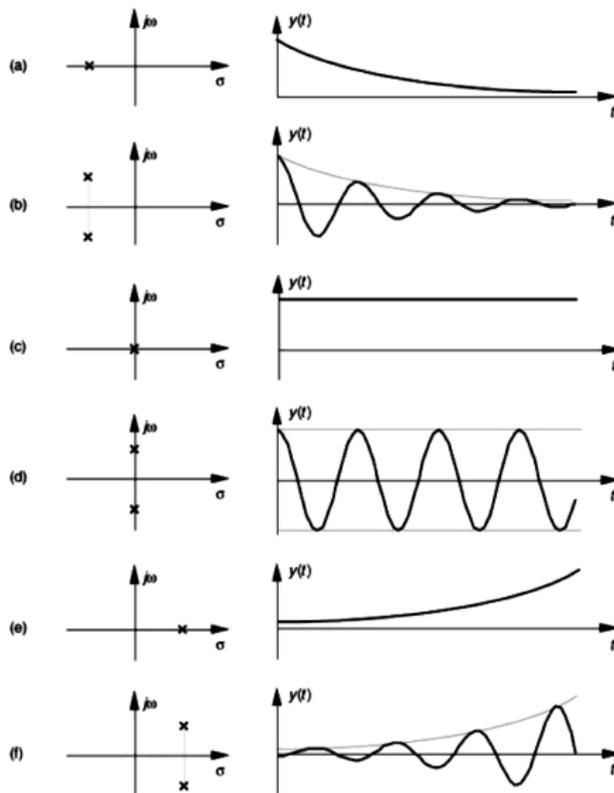
Stabilité  $\Leftrightarrow$  tous les pôles de  $H(p)$  sont à partie réelle strictement négative et que l'ordre de son dénominateur est supérieur ou égal à celui du numérateur

(11)

# Stabilité et pôles : illustrations

Les systèmes comme les oscillateurs dont un ou plusieurs pôles d'ordre 1 ont une partie nulle, sont dits stable au sens large.

Ces systèmes sont stables au sens large mais pas au sens strict.



Transformée de Fourier et de Laplace

Echantillonnage

Analyse des circuits

- ▶ Caractérisé par une relation entrée sortie  $y[n] = f(x[n])$
- ▶ Les valeurs en entrée et en sortie ne sont connues qu'à des instants discrets
- ▶ L'intervalle de temps qui sépare deux de ces instants est la période d'échantillonnage notée  $T_e$  ou  $T_s$  en anglais

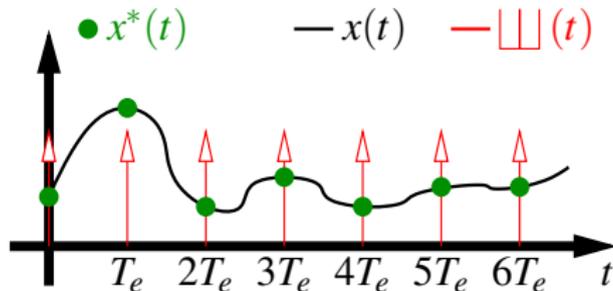
## Théorème de Nyquist-Shannon

L'échantillonnage d'un signal exige une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la bande passante de ce signal.

# L'Echantillonnage: le Peigne de Dirac

## Echantillonnage

L'échantillonnage peut être modélisé par une multiplication entre le signal analogique par un peigne de Dirac



$$x^*(nT_e) = x(t) \cdot \square\square\square_{T_e}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$$x^*(nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

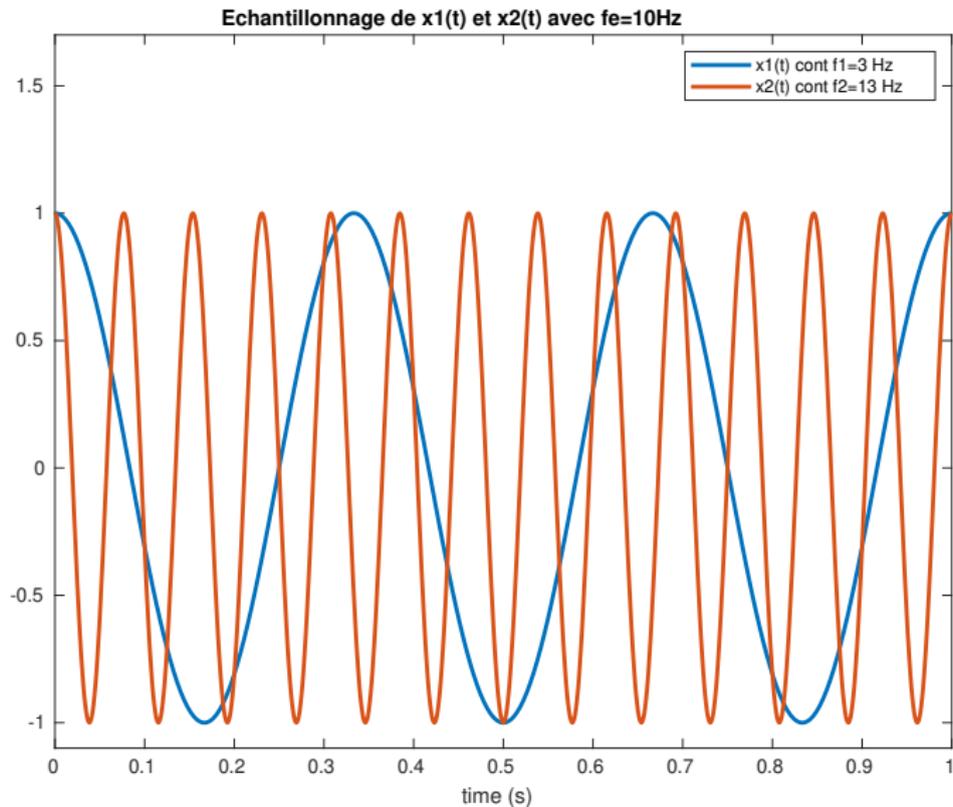
## Exemple fonction sinusoidale

Soit  $x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$  et  $x_2(t) = \cos(2\pi f_2 t)$  2 signaux qu'on échantillonnera à une fréquence  $f_e = \frac{1}{T_e}$ . On prendra  $f_2 = f_e + f_1$

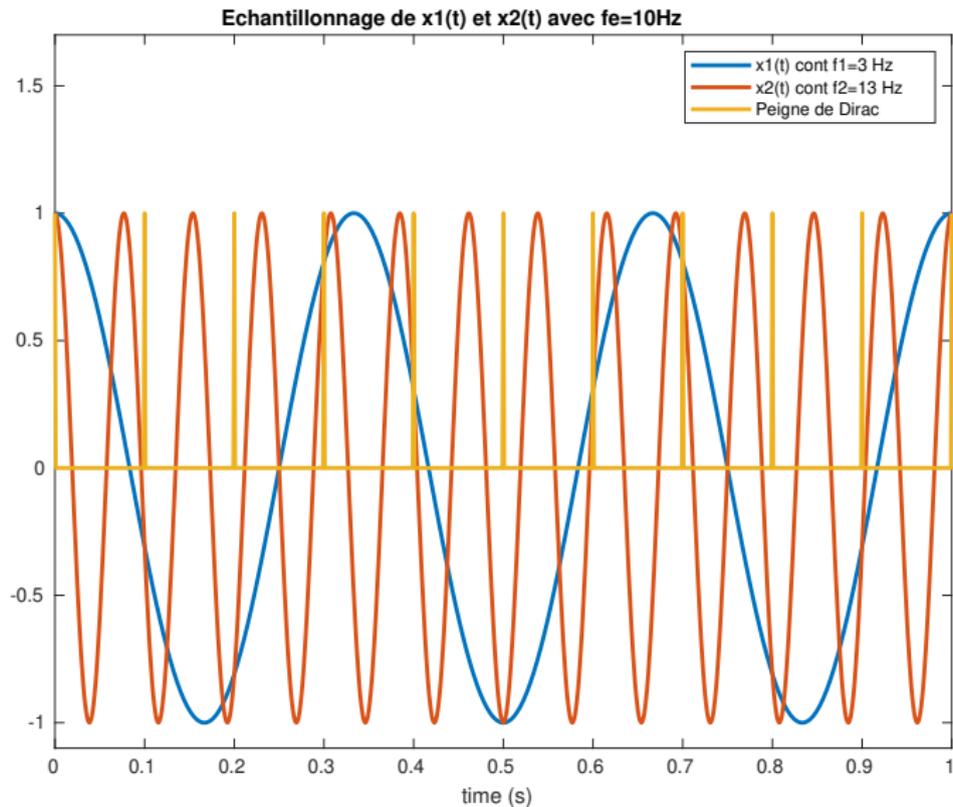
$$x_1^*(t) = \cos(2\pi f_1 t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_1 nT_e) \delta(t - nT_e)$$

$$\begin{aligned} x_2^*(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_2 nT_e) \delta(t - nT_e) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\underbrace{2\pi f_e nT_e + 2\pi f_1 nT_e}_{2\pi n}) \delta(t - nT_e) = x_1^*(t) \end{aligned}$$

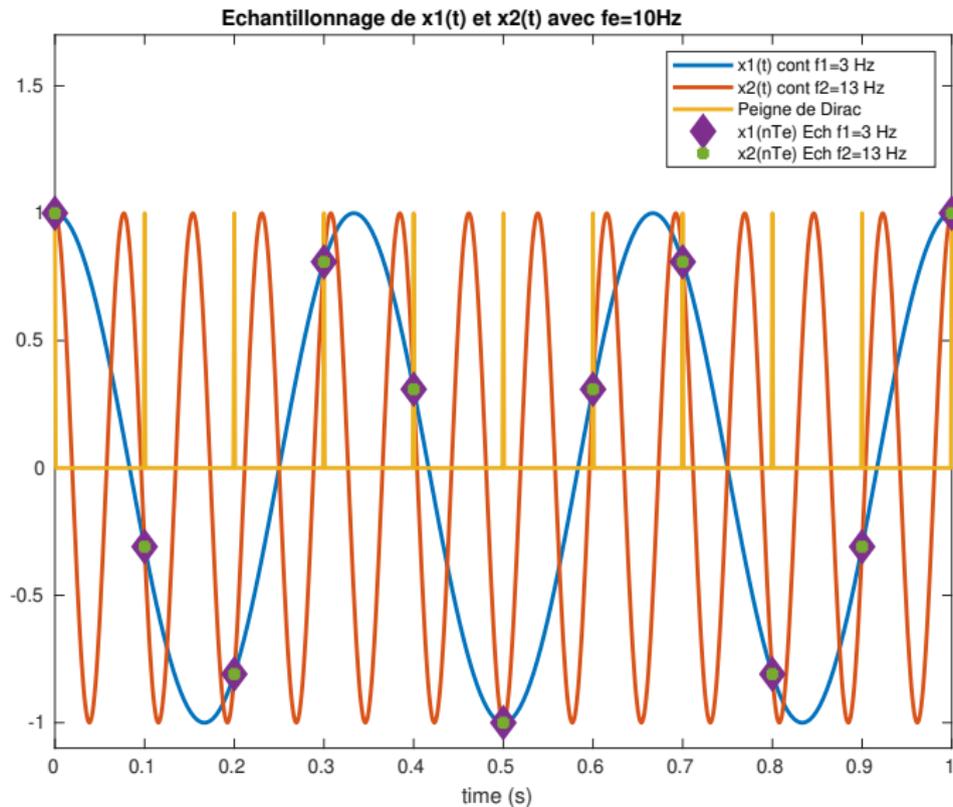
# Exemple Repliement du signal



# Exemple Repliement du signal



# Exemple Repliement du signal



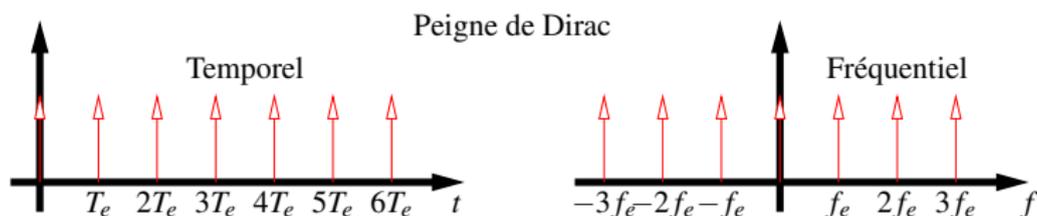
# Impact fréquentiel de l'échantillonnage

On peut démontrer en utilisant les séries de Fourier que

$$\text{II}_{T_e}(t) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn2\pi f_e t}$$

La transformée de Fourier de  $\text{II}_{T_e}(t)$  est donc donnée par

$$TF\{\text{II}_{T_e}(t)\} = \text{II}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{II}(T_e) e^{-j2\pi ft} dt = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_e)$$



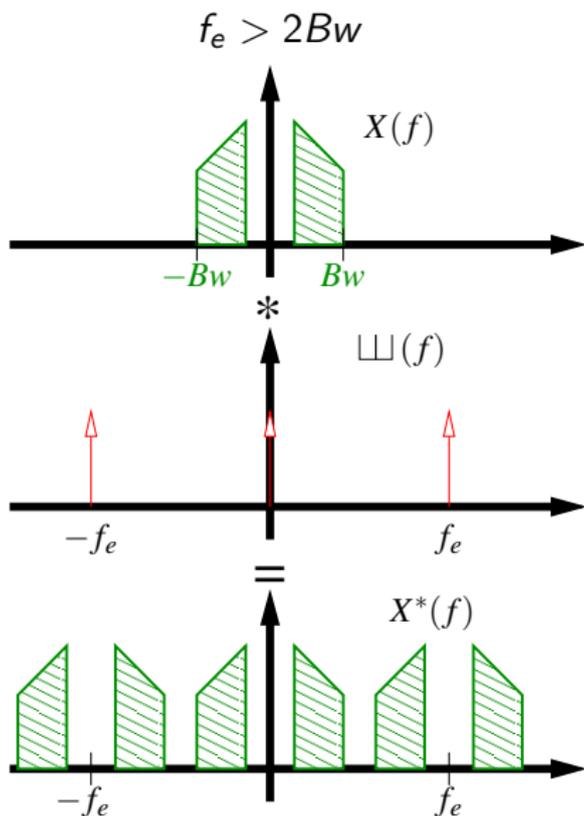
# Impact fréquentiel de l'échantillonnage

L'échantillonnage est modélisé par une multiplication par un peigne de Dirac dans le domaine temporel donc c'est une convolution dans le domaine fréquentiel

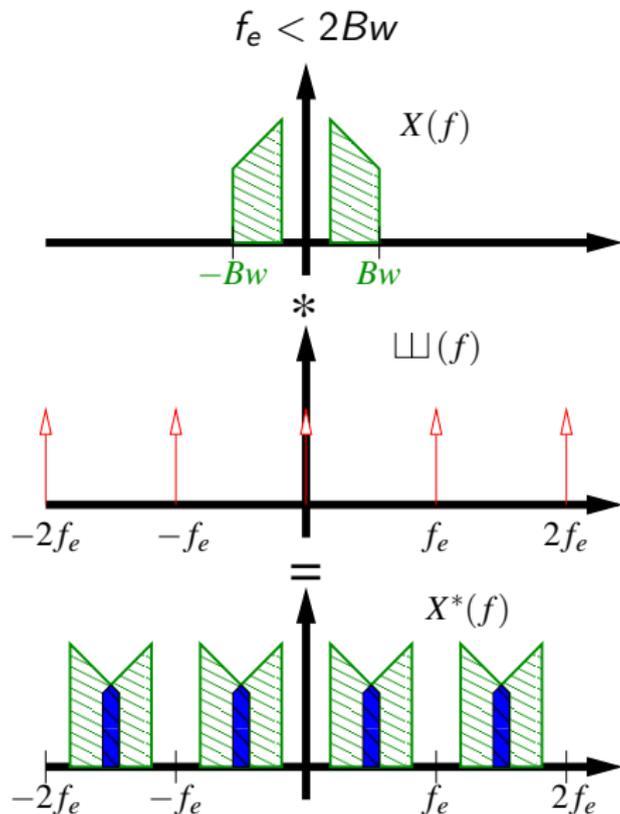
$$X^*(f) = X(f) * \text{III}(f) = X(f) * f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nfe)$$

$$X^*(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(k) \delta(f - nfe - k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nT_e)$$

Le spectre de  $X^*(f)$  est infini et est périodisé avec une période  $f_e$



# Echantillonnage



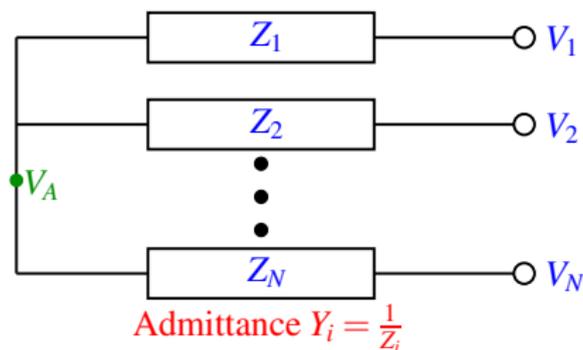
Transformée de Fourier et de Laplace

Echantillonnage

Analyse des circuits

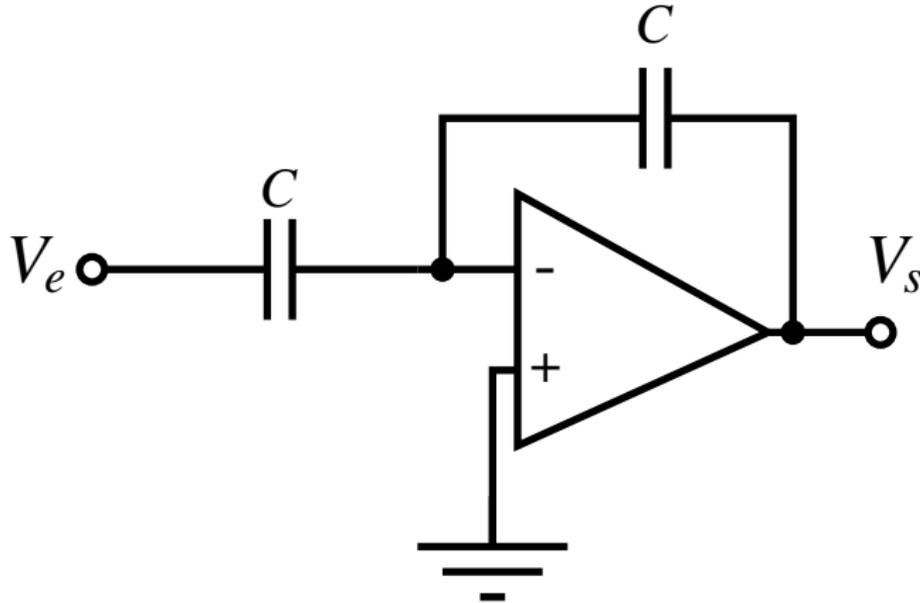
## Pré-requis: Millman

Millman: Dans un circuit électrique à  $N$  branches, la tension au noeud central est égale à la somme des tension respectivement multipliées par l'admittance de la branche, le tout divisé par la somme des admittances.



$$V_A = \frac{\sum_{i=1}^N V_i Y_i}{\sum_{i=1}^N Y_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{V_i}{Z_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{Z_i}}$$

# Pré-requis: Amplificateur Opérationnel



Amplificateur Opérationnel:

- ▶ Gain et bande passante infinis
- ▶  $V^+ - V^- = \epsilon \simeq 0$
- ▶ Impédances d'entrée nulles ( $i^+ = i^- = 0$ )

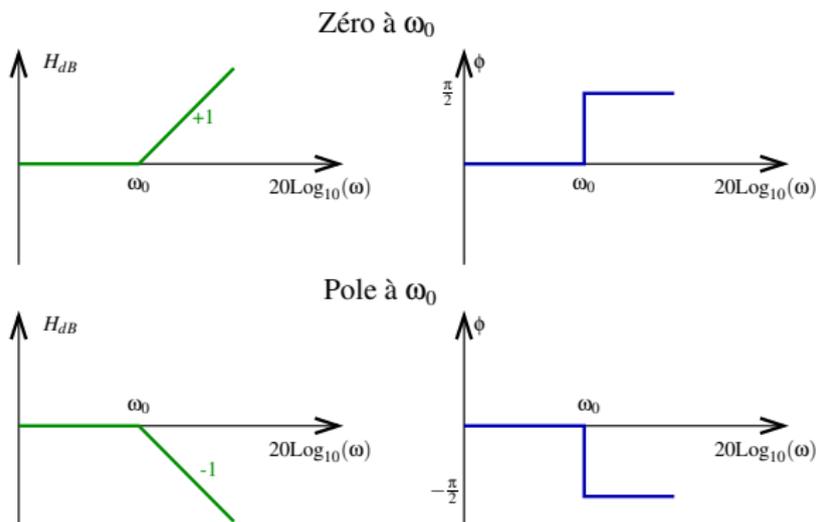
La puissance en dB d'une puissance linéaire  $P$  par rapport à une puissance de référence  $P_R$  est donnée par:

$$P_{dB} = 10\text{Log}_{10} \left( \frac{P}{P_R} \right)$$

Pour une fonction de transfert  $H(j\omega) = \underbrace{|H(\omega)|}_{\text{Module}} e^{j\overbrace{\phi(\omega)}^{\text{Phase}}}$ , le module en dB est donné par:

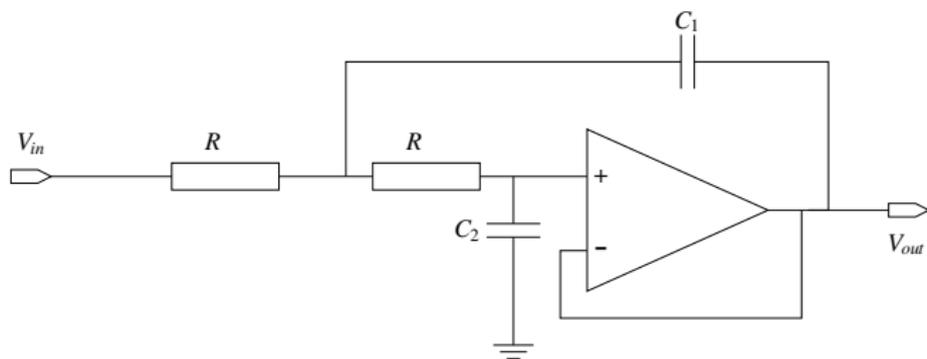
$$H_{dB} = 10\text{Log}_{10} \left( \frac{|H(j\omega)|^2}{P_R} \right), \text{ For a } P_R=1 \text{ } H_{dB} = 20\text{Log}_{10} (|H(j\omega)|)$$

Pour tracer le diag. de Bode de  $H(j\omega) = \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{k=1}^n (j\omega - p_k)}$ , il faut calculer les racines du numérateur (zéros) et du dénominateur (pôles).



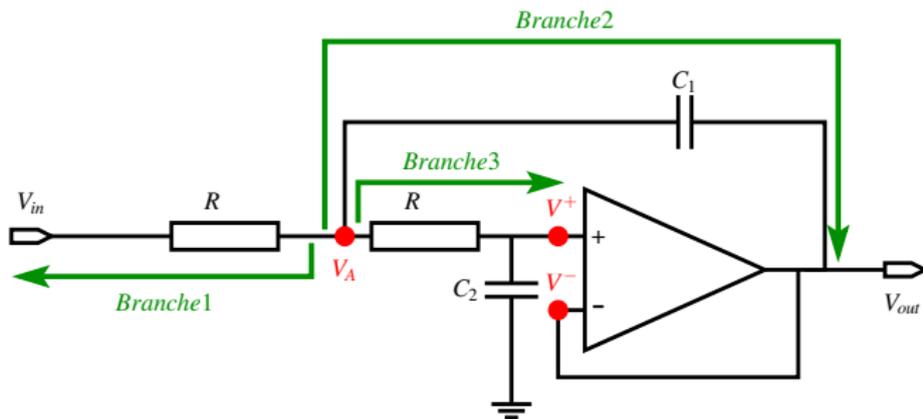
Le diag. de Bode de  $H(p)$  est la somme des diagrammes de Bode des zéros et pôles

## Pré-requis: exercice



1. En utilisant le théorème de Millman, calculer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$  puis  $H(j\omega)$
2. Déterminer les valeurs des zéros et des pôles de  $H(j\omega)$  pour  $R = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 1 \text{ nF}$  et  $C_2 = 100 \text{ nF}$
3. Tracer le diagramme de Bode du module et de la phase de  $H(j\omega)$

## Pré-requis: exercice



1. En utilisant le théorème de Millman, calculer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$  puis  $H(j\omega)$
2. Déterminer les valeurs des zéros et des pôles de  $H(j\omega)$  pour  $R = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 1 \text{ nF}$  et  $C_2 = 100 \text{ nF}$
3. Tracer le diagramme de Bode du module et de la phase de  $H(j\omega)$

# Correction-1

Question 1: Appliquons le théorème de Millman au noeud  $V_A$ :

$$V_A(p) = \frac{\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_{out}}{\frac{1}{C_1 p}} + \frac{V^+}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{C_1 p}} + \frac{1}{R}}$$

Comme l'amplificateur est un amplificateur opérationnel, on a  $V^+ \simeq V^- = V_{out}$ ,

$$V_A(p) = \frac{\frac{V_{in}}{R} + V_{out} (C_1 p + \frac{1}{R})}{\frac{2}{R} + C_1 p} = \frac{V_{in} + V_{out}(RC_1 p + 1)}{2 + RC_1 p}$$

On a par ailleurs un pont diviseur entre les noeuds  $V^+$  et  $V_A$

$$V^+ = V_{out} = \frac{\frac{1}{C_2 p}}{R + \frac{1}{C_2 p}} V_A \implies V_A = (RC_2 p + 1) V_{out}$$

En remplaçant  $V_A$  par son expression et en ré-arrangeant les termes

$$H(p) = \frac{V_{out}(p)}{V_{in}(p)} = \frac{1}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 2RC_2 p + 1}$$

Notez qu'on aurait pu prolonger la 3ème branche à  $C_2$  dans l'application du théorème de Millman, le résultat aurait été identique à celui obtenu.

Question 2- Calcul des pôles et les zéros de  $H(p)$ : On peut facilement constater que la fonction a aucun zéro et qu'elle a 2 pôles.

Pour  $C_2 > C_1$ , on trouve les pôles suivants:

$$p_{1,2} = \frac{-C_2 \pm \sqrt{C_2(C_2 - C_1)}}{RC_1 C_2}$$

Les 2 pôles ont des parties réelles négatives donc notre système est stable.

Pour les valeurs considérées de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $R$ , on obtient  $p_1 = -50.126$  et  $p_2 = -1.999 \cdot 10^4$ .

La fonction de transfert peut s'exprimer à présent ainsi:

$$H(p) = \frac{1}{R^2 C_1 C_2 (p - p_1)(p - p_2)}$$

## Correction-3

Question 3- Tracé du diagramme de Bode: Commençons par calculer  $H(j\omega)$ , son module et son argument.

Pour trouver  $H(j\omega)$  à partir de  $H(p)$ , il suffit de remplacer  $p$  par  $j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{1}{R^2 C_1 C_2 (j\omega - p_1)(j\omega - p_2)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{R^2 C_1 C_2 \left( \sqrt{\omega^2 + p_1^2} \right) \left( \sqrt{\omega^2 + p_2^2} \right)}$$

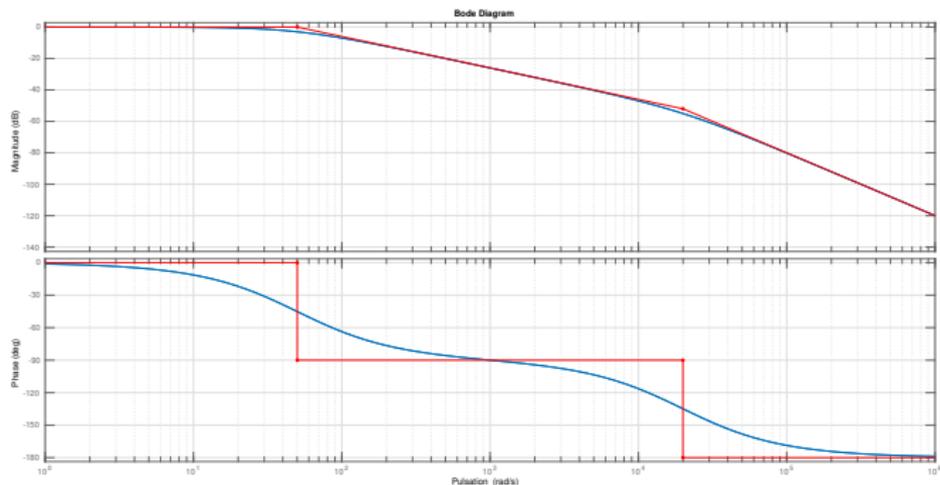
Pour le tracé de Bode du module, nous aurons un gain constant pour  $\omega < |p_1|$ , une fois dépassé  $|p_1|$ , nous aurons une pente de -1 (-20 dB/decade). Pour  $\omega > |p_2|$ , une deuxième atténuation de -1 dû au 2ème pôle s'ajoutera à la première et nous aurons ainsi une pente -2 (-40 dB/decade).

Pour la phase:

$$\Phi(j\omega) = -\operatorname{artan} \left( \frac{-\omega}{p_1} \right) - \operatorname{arctan} \left( \frac{-\omega}{p_2} \right)$$

Ceci se traduira par un déphasage de  $-\frac{\pi}{2}$  dû au premier pôle et un deuxième déphasage additionnel de  $-\frac{\pi}{2}$  après le deuxième pôle, donnant ainsi un déphasage cumulé de  $-\pi$ .

# Correction-4



Ci dessus le tracé du diagramme de Bode en rouge et le tracé réel en bleu pour les valeurs de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $R$

This is the end

Merci pour votre attention

Questions ?