Exercice 1

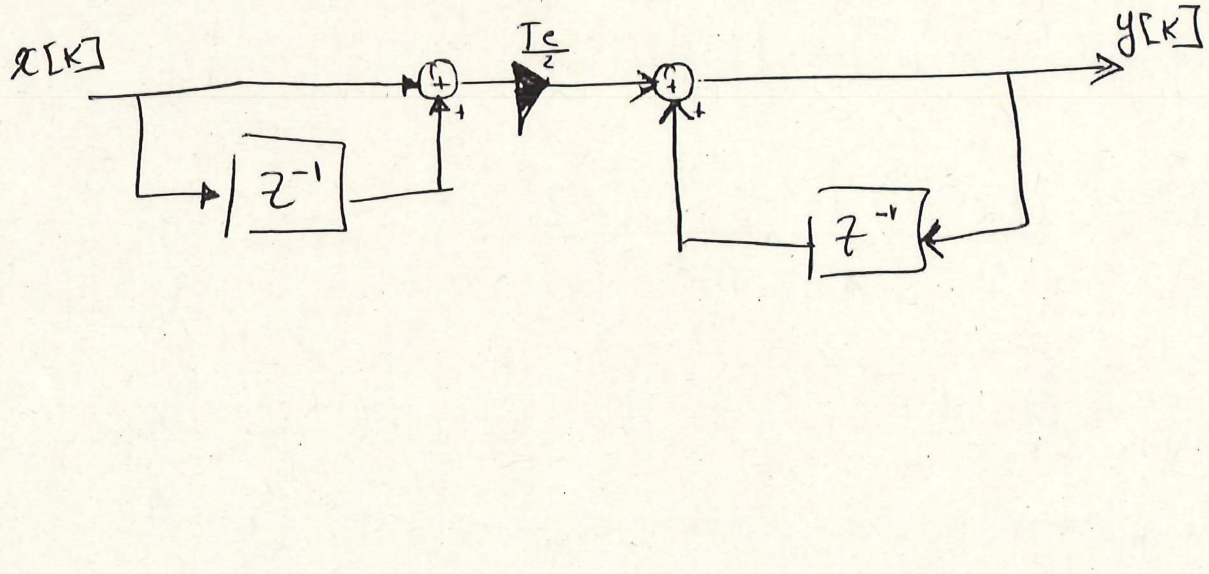
1. $y[K] = y[K-1] + Te \dfrac{x[K] + x[K-1]}{2}$

$\Big\downarrow$ TZ

$$Y(z) = Y(z) \cdot z^{-1} + Te \frac{X(z) + X(z) \cdot z^{-1}}{2}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Te}{2} \; \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

2. Une implémentation possible de l'intégrateur



Exercice 2

1. L'équation de récurrence du filtre est son équation temporel

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(1-z^{-3}\right)^2}{9\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$Y(z)\left(1-2z^{-1}+z^{-2}\right) = \frac{X(z)}{9}\left(1-2z^{-3}+z^{-6}\right)$$

$$Y(z) - 2\,Y(z).z^{-1} + z^{-2}Y(z) = \frac{1}{9}\left(X(z) - 2\,X(z).z^{-3} + X(z).z^{-6}\right)$$

passage dans le domaine temporel

$$y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = \frac{1}{9}\left(x[n] - 2x[n-3] + x[n-6]\right)$$

$$y[n] = \frac{1}{9}\left(x[n] - 2x[n-3] + x[n-6]\right) + 2y[n-1] - y[n-2]$$

2- On remarque que le numérateur présente une forme remarquable $(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$H(z) = \frac{\left(1-z^{-1}\right)^2\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)^2}{9\,\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right)^2$$

On se retrouve une fonction de transfert avec un dénominateur qui vaut 1 et donc le filtre est RIF ou FIR

Scanned by TapScanner

3- Pour calculer la réponse indicielle et impulsionnelle, il faut utiliser l'équation aux récurrences. On peut utiliser celle qu'on a trouvée dans la question 1 mais on peut aussi calculer l'équation non-récursive en utilisant le résultat de la question 2.

$$H(z) = \frac{1}{9}\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{9}\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}\right)$$

$$Y(z) = \frac{1}{9}\left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}\right) X(z)$$

D. Temporel

$$y[n] = \frac{1}{9}\left(x[n] + 2x[n-1] + 3x[n-2] + 2x[n-3] + x[n-4]\right)$$

On voit que l'expression ne dépend pas des valeurs précédentes de $y[n]$.

3- Réponse Indicielle et Impulsionelle (suite)

n	$\delta[n]$	Impulsionelle $y[n]$	$u[n]$	Indicielle $y[n]$
-1	0	0	0	0
0	1	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{9}$
1	0	$\frac{2}{9}$	1	$\frac{3}{9}$
2	0	$\frac{3}{9}$	1	$\frac{6}{9}$
3	0	$\frac{2}{9}$	1	$\frac{8}{9}$
4	0	$\frac{1}{9}$	1	1
5	0	0	1	1
6	0	0	1	1
			1	

4- Pour calculer le gain complexe, il suffit de remplacer z par $e^{j\omega T_e}$

$$H(j\omega) = \frac{1}{9}\left(1 + 2e^{-j\omega T_e} + 3e^{-2j\omega T_e} + 2e^{-3j\omega T_e} + e^{-4j\omega T_e}\right)$$

$$= \frac{1}{9} e^{-2j\omega T_e}\left(e^{2j\omega T_e} + 2e^{j\omega T_e} + 3 + 2e^{-j\omega T_e} + e^{-2j\omega T_e}\right)$$

$$= \frac{1}{9} e^{-2j\omega T_e}\left(2\cos(2\omega T_e) + 4\cos(\omega T_e) + 3\right)$$

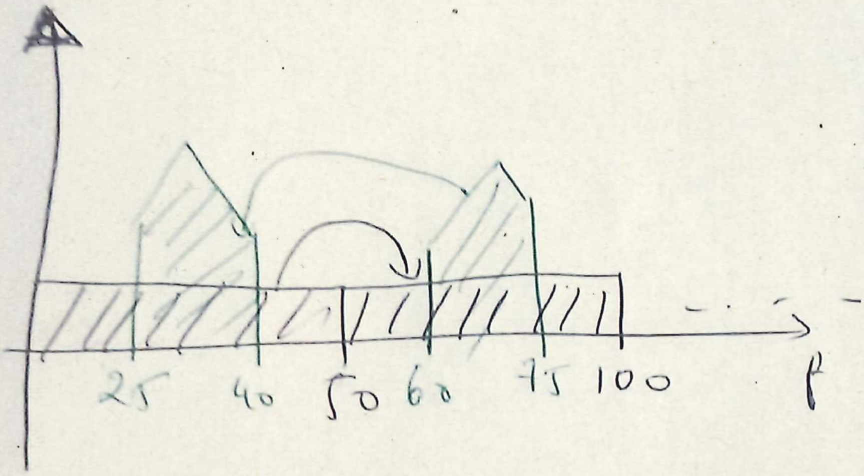
La phase de cette fonction de transfert est $-2\omega T_e$ et donc si on calcule le retard de groupe de ce filtre, on trouve $t_g = \frac{-\partial\varphi(\omega)}{\partial\omega} = 2T_e$ → un retard de groupe indépendant de la fréquence. Ceci est une propriété de tous les filtres

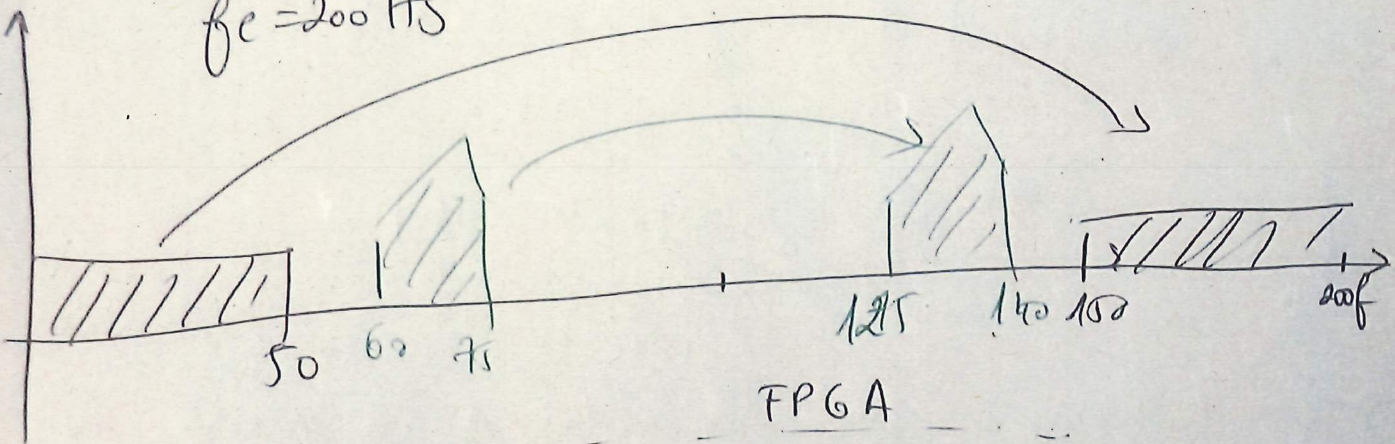
Exercice 3

1- La cadence finale devrait être égale à 2 fois la bande passante => 100 ech/s

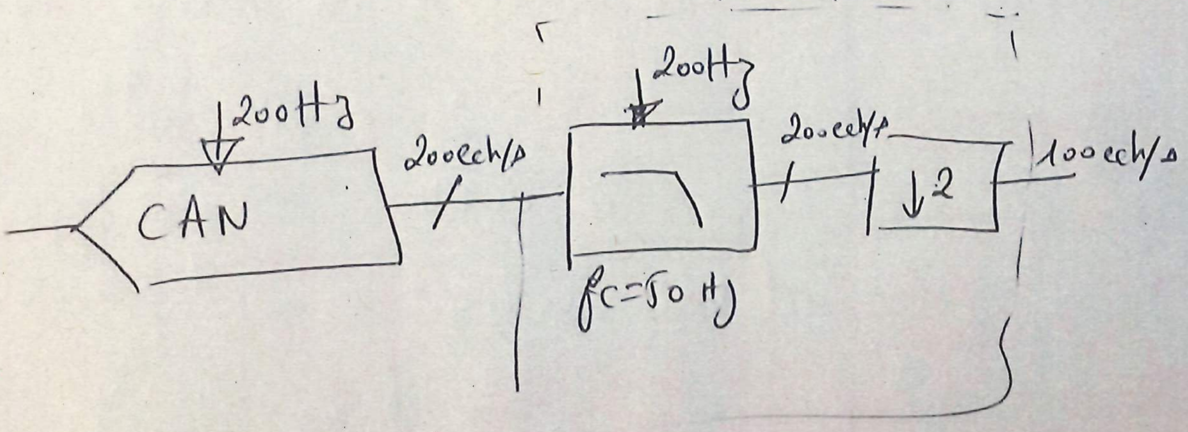
2-

$f_e = 100\,Hz$





3-



4- $f(t) = TF^{-1} \left\{ F(w) \right\}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\, e^{jwt}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} e^{jwt}\, dw \quad \text{avec } w_c = 2\pi \times f_0$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{jwt}}{jt} \right]_{-w_c}^{w_c} = \frac{1}{2\pi} \, \frac{e^{jw_c t} - e^{-jw_c t}}{jt}$$

$$= \frac{w_c}{2\pi} \, \frac{e^{jw_c t} - e^{-jw_c t}}{j t w_c} = 2 . f_c \operatorname{sinc}(w_c t)$$

– On échantillonne $f(t)$ à $Te = \frac{1}{200}$

$$f(nTe) = 2f_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(w_c\, nTe)$$

6- On remarque que le filtre a la moitié de ses coefficients qui valent 0. C'est pour cette raison que ce type de filtre ~~est très~~ appellé Half Band filter est très utilisé en pratique.
La condition est que $f_c = \frac{fe}{4}$ $\left(50 = \frac{200}{4} \right)$